

EXERCICE I (5 points)

Dans le plan on considère un triangle ABC. On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [BA]. On pose BC = a, AC = b et AB = c.

- 1°) a) Démontrer que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$
 b) Démontrer que : $4 \vec{BB'} \cdot \vec{CC'} = \vec{BA} \cdot \vec{CA} - 2BC^2$
 c) En déduire que les droites (BB') et (CC') sont perpendiculaires si et seulement si la relation (1) : $b^2 + c^2 = 5a^2$ est vérifiée.
 d) Démontrer que si les médianes (BB') et (CC') sont perpendiculaires, alors $AA' = \frac{3}{2}a$.
- 2°) Dans cette question on suppose satisfaite la relation (1) : $b^2 + c^2 = 5a^2$.
 a) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$.
 b) Déterminer l'ensemble (F) des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 5a^2$; puis vérifier que A appartient à (F).
- 3°) Application
 a) On donne a = 6 cm ; b = 9 cm et c = $3\sqrt{11}$ cm.
 Vérifier que la relation (1) est satisfaite ; puis en déduire la construction d'un triangle ABC répondant à ces données. Expliquer la construction.
 b) Représenter dans ce cas les ensembles (E) et (F).

EXERCICE II (5 points)

Partie A:

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal direct (O, u, v) (unité 1 cm), on considère le point G₀ d'affixe z₀ = re^{iθ}, où r et θ sont deux nombres réels fixés avec r > 0.

Soit M₀ le point d'affixe z₀ tel que le triangle OG₀M₀ soit équilatéral direct. On désigne par G₁ le centre de gravité du triangle OG₀M₀.

- 1°) a) Démontrer que $1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$
 b) Exprimer z₀ en fonction de z₀.
 c) Démontrer que le point G₁ d'affixe z₁ est l'image du point G₀ par la similitude directe S de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.
- 2°) On définit dans le plan P les deux suites de points (M_n)_{n>0} et (G_n)_{n>0} telles que, pour tout entier naturel n, le triangle OG_nM_n soit un triangle équilatéral direct de centre de gravité G_{n+1}.
 a) Pour tout entier n, on désigne par z_n l'affixe de G_n et Z_n l'affixe de M_n. Démontrer que : G_{n+1} = S(G_n) et exprimer z_{n+1} en fonction de z_n.
 b) Pour tout entier n, exprimer z_n en fonction de n, r et θ.

3°) On suppose dans cette question que z₀ = 8 e^{iπ/4}. Placer les points G₀, G₁, G₂, G₃ et G₄.

Partie B:

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal direct (O, u, v, w), on considère la suite de points (K_n)_{n>0} telle que G_nK_n = OG_n ∧ OG_{n+1}, où les points G₀, G₁, ..., G_n, ... sont ceux de la partie A situés dans le plan (O, u, v).

- 1°) a) Montrer que G₀K₀ = $\frac{r^2\sqrt{3}}{6}$.
 b) En déduire l'aire du triangle OG₀G₁ en fonction de r.
- 2°) On considère la suite numérique (u_n)_{n>0} définie par u_n = G_nK_n. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Puis en déduire u_n en fonction de r et de n.
- 3°) Pour tout n, on note S_n la somme des aires des triangles OG₀G₁; OG₁G₂; ... ; OG_{n-1}G_n. Exprimer S_n en fonction de r et n et calculer la limite de S_n quand n tend vers l'infini.

PROBLEME (10 points)

Le problème a pour objet l'étude d'une suite de fonctions, d'une suite d'intégrales, puis la recherche d'une valeur approchée d'une équation du type f(x) = k.

Partie A: étude d'une suite de fonctions

On note f_n la fonction numérique de la variable réelle définie sur] - ∞, - 2[∪] - 2, + ∞[par : $f_n(x) = \frac{e^{1+x}}{(x+2)^n}$ pour n entier naturel non nul. (C_n) désigne la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, i, j) (unité 2 cm).

- 1°) a) Etudier les limites de f_n en - ∞ et en + ∞ (pour la limite en + ∞, on posera X = x + 2).
 b) Etudier suivant la parité de n, la limite de f_n en - 2.
 2°) a) Calculer f'_n(x), puis étudier son signe suivant la parité de n.
 b) Dresser le tableau de variation de f_n.
 3°) a) Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe A.
 b) Déterminer une équation de la tangente (T_n) à (C_n) en A.
 4°) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement ce résultat.
 b) Démontrer que pour tout entier n non nul, et pour tout réel x différent de - 2, on a : f'_n(x) = f_n(x) - n f_{n+1}(x).
 c) En déduire les positions relatives des courbes (C₁) et (C₂). Représenter graphiquement (C₁) et (C₂).

Partie B : étude d'une suite d'intégrales.

Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \int_{-1}^0 f_n(x) dx$, pour tout entier naturel n non nul.

- 1°) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et que pour tout n non nul on a : u_n ≥ 0. Que peut-on en déduire ?
 2°) Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a $\frac{1-2^{-n+1}}{n-1} \leq u_n \leq \frac{1-2^{-n+1}}{n-1} e$. En déduire la limite de la suite (u_n).
 3°) a) En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : n u_{n+1} = 1 + u_n - $\frac{e}{2^n}$.
 b) Retrouver ce résultat en utilisant la relation de la question 4°)

b) Retrouver ce résultat en utilisant la relation de la question 4°)

c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^0 \frac{ne^{1+x}}{(x+2)^{n+1}} dx = 1$.

Partie C : recherche de la solution positive de l'équation g(x) = e.

On considère la fonction g définie sur [0, + ∞[par : g(x) = f₁(x-1). On note (Γ) sa courbe représentative dans le repère (O, i, j).

- 1°) Construire la courbe (Γ) à partir de la courbe (C₁). Justifier la construction.
 2°) On appelle Φ la fonction définie sur [0; + ∞[par :

$$\Phi(x) = 1 + \ln(1+x)$$
 a) Démontrer que l'équation Φ(x) = x admet une solution unique α dans l'intervalle [2; 3].
 b) Démontrer que pour x positif, l'équation Φ(x) = x est équivalente à l'équation g(x) = e.
 c) Démontrer que pour tout x de I, |Φ'(x)| ≤ $\frac{1}{3}$.

3°) Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : V₀ = 2 et V_{n+1} = Φ(V_n).

- a) Démontrer que la suite (V_n) est croissante et majorée par α. Conclure.
 b) Démontrer que Φ(I) ⊂ I.
 c) Démontrer par récurrence, que pour tout n, V_n appartient à l'intervalle I.
 4°) a) Prouver que pour tout n, on a $|V_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |V_n - \alpha|$, puis que $\alpha - V_{n+1} \leq \frac{1}{3} (\alpha - V_n)$.
 b) En déduire que, pour tout n : $\alpha - V_n \leq \frac{1}{3^n}$ et que la suite (V_n) converge vers α.
 c) Déterminer un entier p pour lequel V_p soit une valeur approchée de α à 10⁻³ près. Calculer cette valeur approchée.