BAC C GABON session 95

3

EXERCICE I (5 points)

1°) On considère le nombre complexe $a = \dfrac{1 - e^{i\theta}}{2(1 + e^{\frac{i\theta}{2}})}$ avec $-2\pi < \theta < 2\pi$. Déterminer le module et l'argument de a dans les deux cas suivants :

* $0 < \theta < 2\pi$
* $-2\pi < \theta < 0$

2°) Dans cette question on prend $\theta = \pi$

a) Démontrer que $|a| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\arg(a) = -\dfrac{\pi}{4}$ $[2\pi]$.

b) Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on définit l'application f qui au point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe az.

Quelle est la nature de l'application f ? Donner ses éléments caractéristiques .

c) K est le point d'affixe 8. Pour tout entier naturel n, on considère la suite de points (M_n) de P définie par la relation de récurrence $M_{n+1} = f(M_n)$ et de premier terme $M_o = K$.
Placer les points M_o, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7 et M_8 dans P.

d) On note A_n l'aire du triangle OM_nM_{n+1} et on pose $S_n = A_o + A_1 + A_2 + ... + A_n$.
Exprimer pour tout n, A_{n+1} à l'aide de A_n.
Déterminer S_n en fonction de n et calculer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE II (4 points)

1°) A et B sont deux points distincts du plan orienté tels que AB = 6 (unité 1 cm).
Déterminer et construire :

E_1 ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\dfrac{\pi}{3}$ $[\pi]$

E_2 ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$

E_3 ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\dfrac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$

E_4 ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.

On représentera ces ensembles avec des couleurs différentes sur le même graphique.

2°) Dans une urne, il y a quatre jetons sur chacun desquels est inscrit le nom d'un ensemble du 1°; tous les jetons portent des noms différents.
On tire successivement et avec remise deux jetons de l'urne; on note à chaque tirage le nom de l'ensemble inscrit sur le jeton tiré. Tous les tirages sont supposés équiprobables.
On appelle X la variable aléatoire associée à l'expérience ci-dessus et qui prend la valeur :

- 3 si les ensembles inscrits sur les jetons tirés sont égaux.
- 2 si les ensembles inscrits sur les jetons tirés sont symétriques par rapport à (AB)
- 1 si les ensembles inscrits sur les jetons tirés sont différents et tels que l'un soit contenu dans l'autre
- m dans les autres cas.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Déterminer le réel m pour que l'espérance mathématique de X soit nulle.

PROBLEME (11 points)

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 1$.
(C) est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique : 10 cm).

Partie A: Etude de la fonction f.

1°) Etudier la dérivabilité de f en 0.

2°) Etudier les variations de la fonction f. On étudiera la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$.

3°) a) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

b) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :
$g(x) = -e^{-\frac{1}{x}} + \dfrac{4x-1}{e^2}$

Calculer $g(\frac{1}{2})$, $g'(x)$ et $g''(x)$.
Déterminer les variations de g′, le signe de g′(x) puis les variations de g.
En déduire le signe de g(x), puis la position de (C) par rapport à (T).

c) Tracer (C) et (T) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie B: Etude d'une suite récurrente.

1°) Démontrer que l'équation f(x) = x admet une seule solution α et que l'on a $\alpha \in]0 ; 1[$.

2°) On pose $I = [0 ; 1]$

a) Démontrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$

b) Démontrer que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \dfrac{4}{e^2}$.

c) En déduire que pour tout $x \in I$, $|f(x) - \alpha| \leq \dfrac{4}{e^2}|x - \alpha|$.

3°) n étant un entier naturel, soit (u_n) la suite définie par :
$u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_o = 1$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier n, $u_n \in I$.

b) Etablir que pour tout entier n, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{4}{e^2}\right)^n$.

c) Conclure à la convergence de (u_n), préciser sa limite et déterminer un entier p tel que u_p en soit une valeur approchée à moins de 10^{-4}.

Partie C: Etude d'une fonction définie par une intégrale.

Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

1°) Justifier l'existence et la dérivabilité de F sur $[0, +\infty[$ et donner sa fonction dérivée F′. Déterminer le sens de variation de F.

2°) a) Sachant que pour tout $t \geq 0$ on a $e^{-t} \leq 1$, démontrer que pour tout $t \geq 0$: $-e^{-t} \leq t - 1$ et $e^{-t} \leq 1 - t + \dfrac{t^2}{2}$

b) En déduire que pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2} \leq f(x)$

c) Démontrer alors que $\int_\alpha^x f(t)dt$ a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Conclure quant à la limite de F en $+\infty$.

3°) Dresser le tableau de variations de F.